2014-0522 1stx141-MAT-B - eksemplarisk besvarelse

Bemærk, at i opgaverne uden hjælpemidler er Maple blot benyttet som tekstbehandling. Til eksamen skal besvarelsen laves med papir og blyant.
Opgavetksten er indsat for overskuelighedens skyld. Den er ikke en del af besvarelsen.

Opgave 1 - uden hjælpemidler

Opgaven

På en solrig sommerdag vokser koncentrationen af alger i vandet ved en bestemt strand med 7% i timen. Det oplyses, at der til at begynde med er en koncentration af alger på 120 mio pr. L.

Indfør passende variable, og opstil en model for udviklingen i koncentrationen af alger som funktion af tiden.

a - Eksponentiel model

Vi indfører to variable:
x er tiden målt i timer
y er algekoncentrationen målt i mio/L

Da vækstraten er 7% pr. time, er der tale om en eksponentiel udvikling, og den tilsvarende fremskrivningsfaktor er $a = 1 + 0.07 = 1.07$
Startværdien, når x = 0, er i opgaven opgivet til 120 målt i enheden mio/L. Dette er b i den generelle formel, som er $y = b \cdot a^x$

Den ønskede model er derfor $y = 120 \cdot 1.07^x$

Opgave 2 - uden hjælpemidler

Opgaven

Reducér $(a+b)^2 - a^2 - ab$.

a - Reduktion af udtryk

$(a+b)^2 - a^2 - a \cdot b = a^2 + b^2 + 2 \cdot a \cdot b - a^2 - a \cdot b = b^2 + a \cdot b = (\boldsymbol{a} + \boldsymbol{b}) \cdot \boldsymbol{b}$

Opgave 3 - uden hjælpemidler

Opgaven

Løs andengradsligningen $x^2 + 2x - 8 = 0$.

a - Løsning af andengrdsligning

Andengradsligningen $x^2 + 2 \cdot x - 8 = 0$ skal løses:
Diskriminanten er $d = b^2 - 4 \cdot a \cdot c = 2^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-8) = 36$
Da $d > 0$, er der to løsninger:

$$x_1 = \frac{-b + \sqrt{d}}{2 \cdot a} = \frac{-2 + \sqrt{36}}{2 \cdot 1} = \frac{4}{2} = 2$$

$$x_2 = \frac{-b-\sqrt{d}}{2\cdot a} = \frac{-2-\sqrt{36}}{2\cdot 1} = \frac{-8}{2} = -4$$

Løseningen er derfor $x = 2 \lor x = -4$

Opgave 4 - uden hjælpemidler

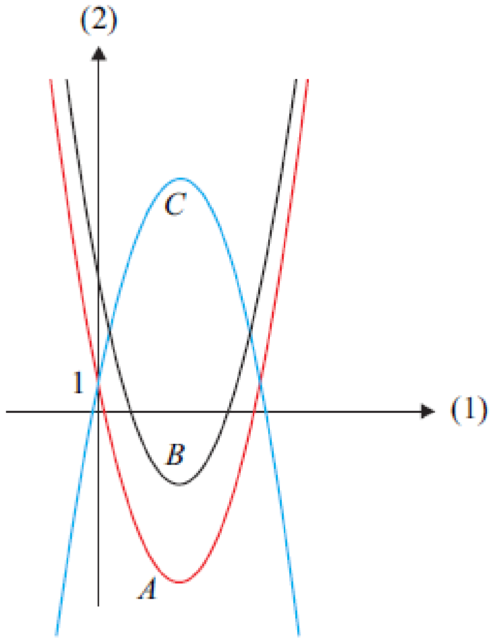
Opgaven

En funktion f er givet ved

$$f(x) = x^2 - 5x + 1.$$

På figuren ses tre parabler A, B og C.

Argumentér for, hvilken af de tre parabler, der er graf for f.



a - Korrekt parabel

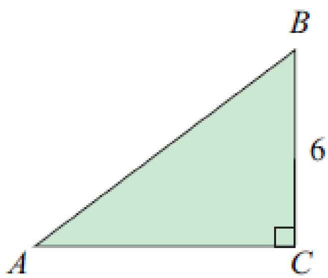
Funktionen f er givet ved $f(x) = x^2 - 5\cdot x + 1$ og dens grafiske billede er en af parablerne A, B eller C som vist i opgaven.
Da $f(0) = 1$ får vi, at det kan være graf A eller graf C
Da koefficienten til x^2 er større end 0 vender grenene opad, **og der kan derfor kun være tale om parabel A.**

Opgave 5 - uden hjælpemidler

Opgaven

Om en retvinklet trekant ABC oplyses, at arealet er 24, og den ene katete er 6.

Bestem sidelængderne i trekant ABC.



Størrelsesforholdene er ikke korrekte

a - Sidelængder i retvinklet trekant

Arealet er givet ved $T = \frac{1}{2}\cdot b\cdot a$, og vi kender arealets værdi og a, som indsættes:

$$24 = \frac{1}{2}\cdot b\cdot 6 \Leftrightarrow b = \frac{24}{\frac{1}{2}\cdot 6} = 8$$

Den sidste side bestemmes med Pythagoras læresætning:

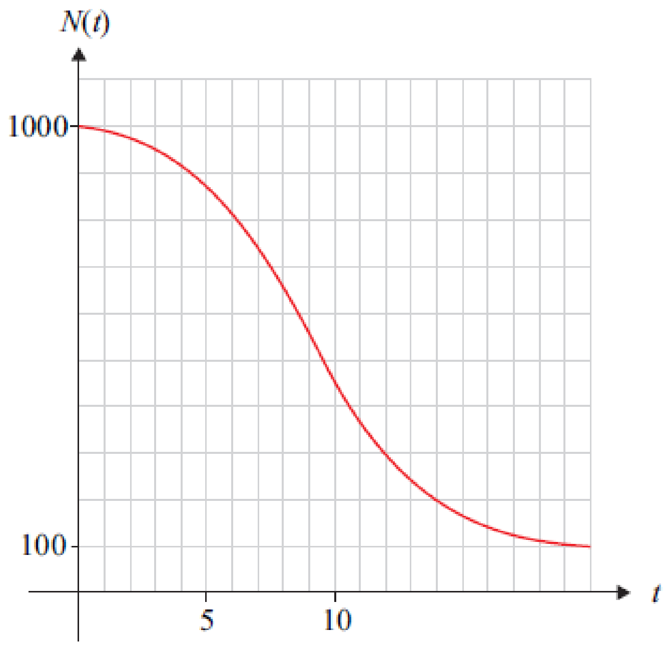
$c = \sqrt{a^2 + b^2} = \sqrt{8^2 + 6^2} = 10$

De tre sider er derfor a = 6, b = 8, c = 10

Opgave 6 - uden hjælpemidler

Opgaven

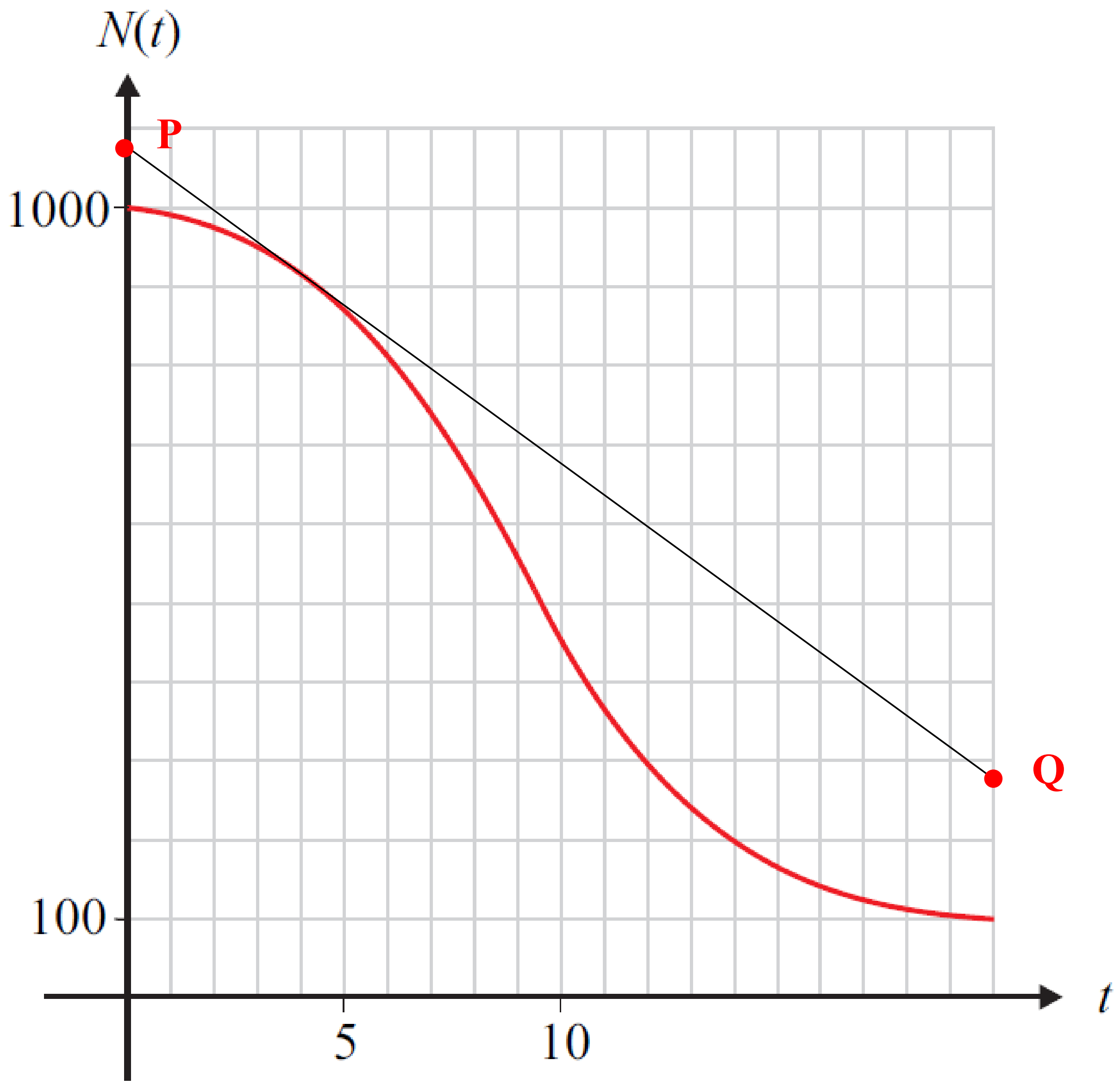
I en model for udviklingen i antallet af individer i en population betegner $N(t)$ antallet af individer i populationen til tidspunktet t (målt i døgn). Nedenfor er vist en del af grafen for N.



Benyt grafen til at bestemme $N'(4)$, og gør rede for, hvad dette tal fortæller om udviklingen af antallet af individer i populationen. Benyt evt. vedlagte bilag 1.

a - Tangenthældning

Bilag:



Tangenten i (4, N(4)) indtegnes på øjemål. Dens hældning er N'(4), og den bestemmes ud fra to punkter aflæst på tangenten:
De vælges langt fra hinanden for størst mulig nøjagtiged, og i nednestående valgt $P(0, 1070)$ og $Q(20, 270)$

$$N'(4) = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \frac{1070 - 270}{0 - 20} = \frac{800}{-20} = -40$$

Vi får altså, at $N'(4) = -40$ og dette tal fortæller, at antallet af individer til tidspunktet 4 døgn falder med 40 individer pr. døgn

Opgave 7 - med hjælpemidler

Opgaven

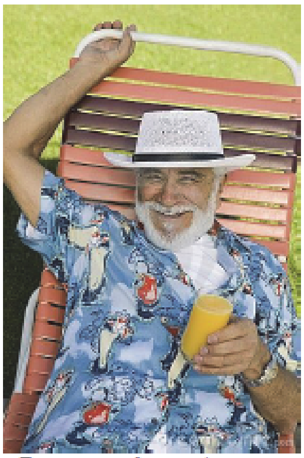


Foto: www.dreamstime.com

Tabellen viser udviklingen i den gennemsnitlige tilbagetrækningsalder fra arbejdsmarkedet for danske lønmodtagere i perioden 2006-2012.

Årstal	2006	2007	2008	2009	2010	2011	2012
Tilbagetræknings-alder (år)	62,01	62,25	62,47	62,75	62,77	63,00	63,08

I en model kan udviklingen beskrives ved

$$y = a \cdot x + b,$$

hvor y er den gennemsnitlige tilbagetrækningsalder for danske lønmodtagere til tidspunktet x (målt i år efter 2006).

a) Benyt tabellens data til at bestemme konstanterne a og b.

b) Benyt modellen til at bestemme den gennemsnitlige tilbagetrækningsalder for danske lønmodtagere i 2014, og giv en fortolkning af konstanten a.

c) I hvilket år vil den gennemsnitlige tilbagetrækningsalder for danske lønmodtagere ifølge modellen overstige 65 år?

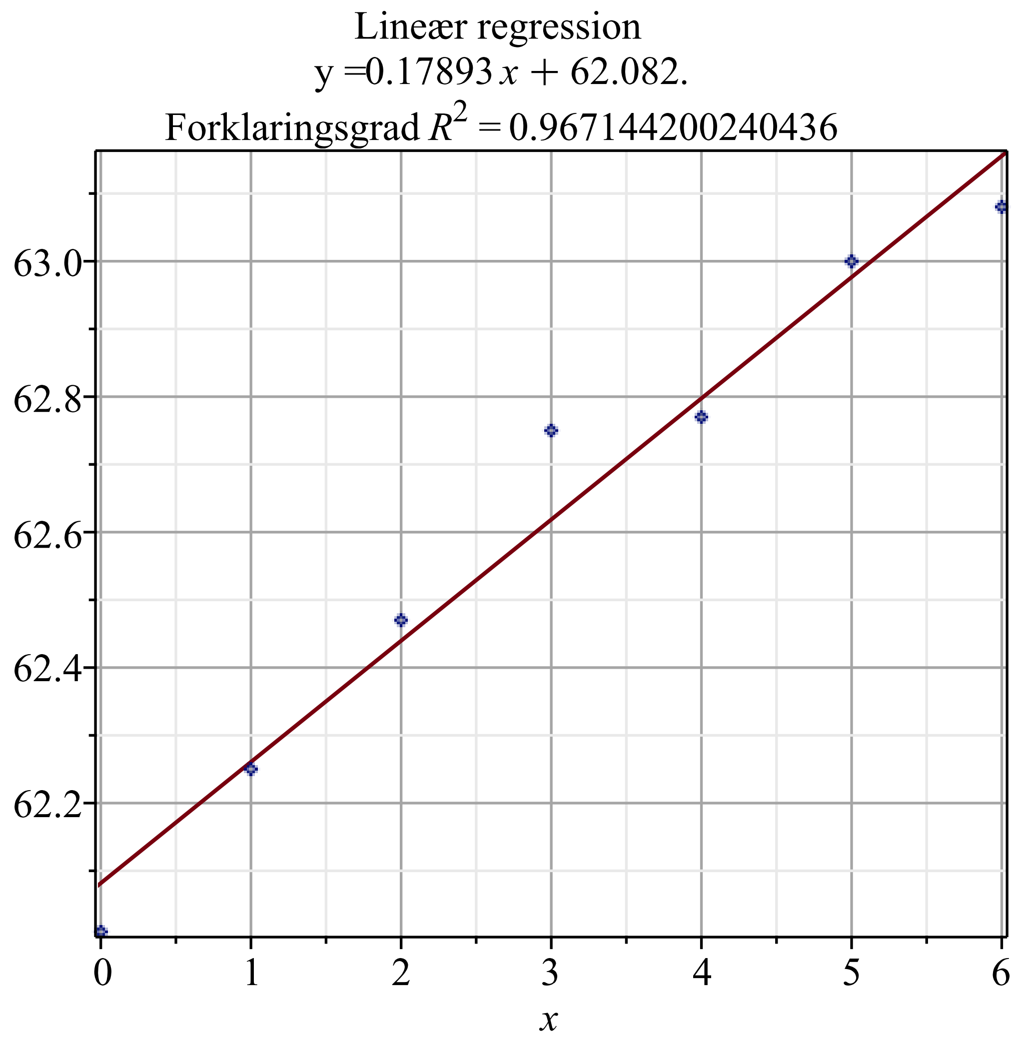
Kilde: Politiken 2.9.13

restart; *with*(*Gym*) :

a - Bestemmelse af a og b

For at bestemme a og b i y=ax+b defineres to lister med data fra opgaven:
$X := [0, 1, 2, 3, 4, 5, 6] = [0, 1, 2, 3, 4, 5, 6]$
$Y := [62.01, 62.25, 62.47, 62.75, 62.77, 63.00, 63.08] =$
$[62.01, 62.25, 62.47, 62.75, 62.77, 63.00, 63.08]$

Herefter bruges Maple-kommandoen LinReg for at lave en lineær regression:
LinReg(*X*, *Y*)



De to konstanter gemmes:
$a := rhs(reg\_koeff)[2] = 0.178928571428577$
$b := rhs(reg\_koeff)[1] = 62.0817857142857$
Vi har altså, at *a* = ,18 og *b* = 62,1

b - Tilbagetrækningsalderen i 2014

Vi definerer nu funktionen, der beskriver tibagetrækningsalderen som funktion af tidspunktet x, som regnes i år efter år 2006:
$f := x \to LinReg(X, Y, x) = x \to Gym\text{:-}LinReg(X, Y, x)$
Kontrol: $f(x) = 0.178928571428577\, x + 62.0817857142857$

Da 2014 er 8 år efter 2006 udregnes f(8):
$f(8) = 63.5132142857143$

Dvs. den gennemsnitlige tilbagetrækningsalder for danske lønmodtagere i 2014 er 63,5 år
Konstanten a fortæller, at tilbagetrækningsalderen hvert år vokser med 0,18 år

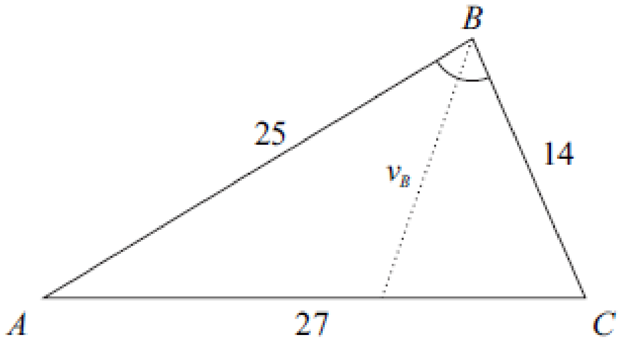
c - Hvornår vil den gennemsnitlige tilbagetrækningsalder være 65 år?

Der opstilles ligningen f(x)=65 og den løses
$solve(f(x) = 65, x) = 16.30938124 \xrightarrow{\text{ceiling}} 17$
Dvs. den gennemsnitlige tilbagetrækningsalder vil overstige 65 efter 17 år, altså i år 2023

Opgave 8 - med hjælpemidler

Opgaven

I trekant ABC er $|AB| = 25$, $|BC| = 14$ og $|AC| = 27$.



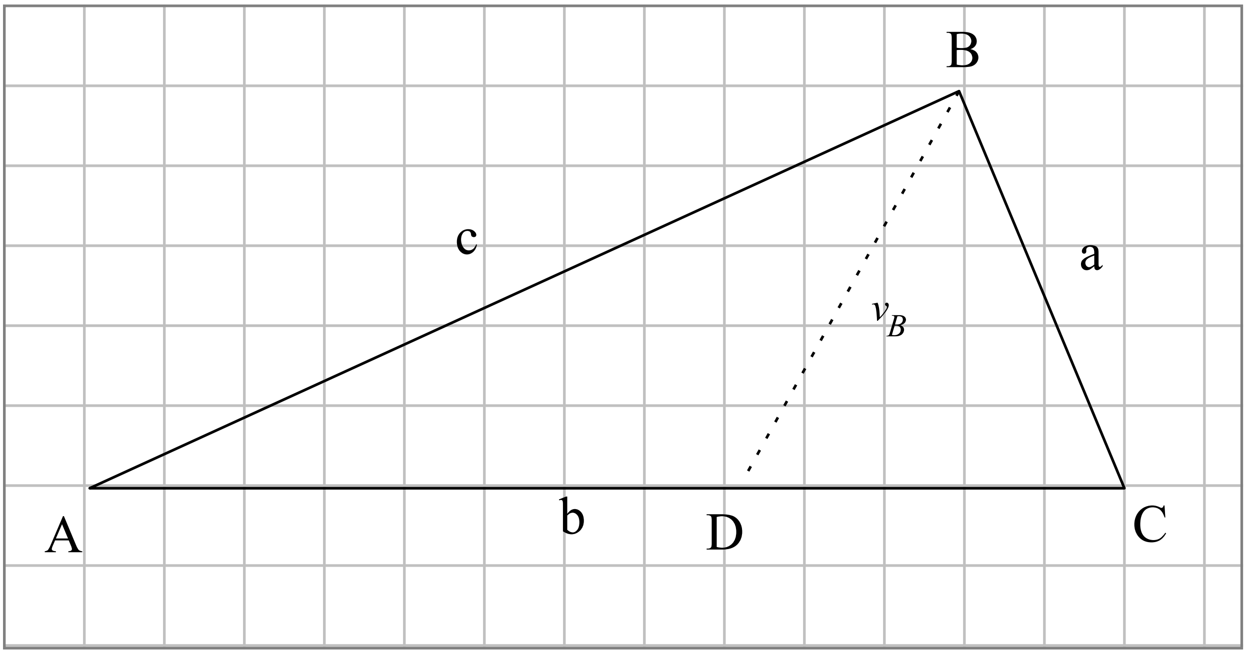
a) Bestem $\angle A$ og $\angle B$ i trekant ABC.

b) Bestem arealet af trekant ABC, og bestem længden af vinkelhalveringslinjen v_B fra B.

restart; *with*(*Gym*) :

a - To vinkler

Skitse:



Følgende er oplyst og defineres i Maple:

$AB := 25 : BC := 14 : AC := 27 :$

Vi benytter nu cosinusrelationen til bestemmelse af $\angle A$, idet der løses med hensyn til vinklen:

$\angle A := solve\left(BC^2 = AB^2 + AC^2 - 2 \cdot AB \cdot AC \cdot Cos(A), A\right) = 30.93201991$

Dvs. $\angle A = 30, 93°$

Tilsvarende findes $\angle B$:

$\angle B := solve\left(AC^2 = AB^2 + BC^2 - 2 \cdot AB \cdot BC \cdot Cos(B), B\right) = 82.44784821$

Dvs. $\angle B = 82, 45°$

b - Arealet af trekant ABC og længden af vinkelhalveringslinjen fra B

Trekantens areal findes som:

$T := \frac{1}{2} \cdot AB \cdot AC \cdot Sin(\angle A) = 173.4819876$

Arealet er defor 173,5

Da linjestykket BD er vinkelhalveringslinjen, fås at $\angle ABD$ er det halve af den før fundne $\angle B$:

$\angle ABD := \frac{1}{2} \cdot \angle B = 41.22392410$

Den sidste vinkel i $\triangle ABD$ kan så finden ud fra vinkelsummen:

$\angle ADB := 180 - \angle ABD - \angle A = 107.8440560$

Herefter benyttes sinusrelationerne til bestemmelse af vinkelhalveingslinjens længde ved at løse ligningen i Maple:

$v_B := solve\left(\frac{Sin(\angle A)}{v_B} = \frac{Sin(\angle ADB)}{AB}, v_B\right) = 13.49994522$

Dvs. vinkelhalveringslinjen v_B har længden 13,50

Opgave 9 - med hjælpemidler

Opgaven

Massen af et bestemt radioaktivt stof aftager som funktion af tiden. Der er følgende sammenhæng mellem massen af det radioaktive stof og tiden t

$$f(t) = 12 \cdot 0{,}97^t,$$

hvor $f(t)$ er massen af det radioaktive stof målt i gram, og t er antal år efter 2014.

a) Forklar, hvad tallene 12 og 0,97 fortæller om udviklingen i massen af det radioaktive stof.

b) Bestem halveringstiden for massen af det radioaktive stof.

restart

a - Tolkning af konstanter

Tallene 12 og 0,97 = 1 - 0,03 fortæller følgende om udviklingen i massen:

I år 2014 var der 12 gram af det radioaktive stof, og mængden er siden aftaget med 3% om året.

b - Halveringstid

Fremskrivningsfaktoren defineres:

$a := 0.97 = 0.97$

Herefter kan halveringstiden bestemmes med formelen:

$T_{\frac{1}{2}} := \frac{\ln(0.5)}{\ln(a)} = 22.75657307$

Dvs. halveringstiden for massen af det radioaktive stof er 23 år

Opgave 10 - med hjælpemidler

Opgaven

En funktion f er bestemt ved

$$f(x) = 2x^3 - 57x^2 - 120x - 5.$$

a) Opskriv en ligning for tangenten til grafen for f i punktet $P(1, f(1))$.

b) Bestem monotoniforholdene for f.

restart

a - En ligning for tangenten til grafen for f i punktet P(1, f(1))

Funktionen defineres i Maple:

$f := x \rightarrow 2 \cdot x^3 - 57 \cdot x^2 - 120 \cdot x - 5 = x \rightarrow 2\,x^3 - 57\,x^2 - 120\,x - 5$

x_0 defineres:

$x_0 := 1 = 1$

Tangentligningen er så:

$y = f'(x_0) \cdot (x - x_0) + f(x_0) = y = -228\,x + 48$

Dvs. en ligning for tangenten til grafen for f i punktet P(1, f(1)) er y= -228·x + 48

b - Bestem monotoniforholdene

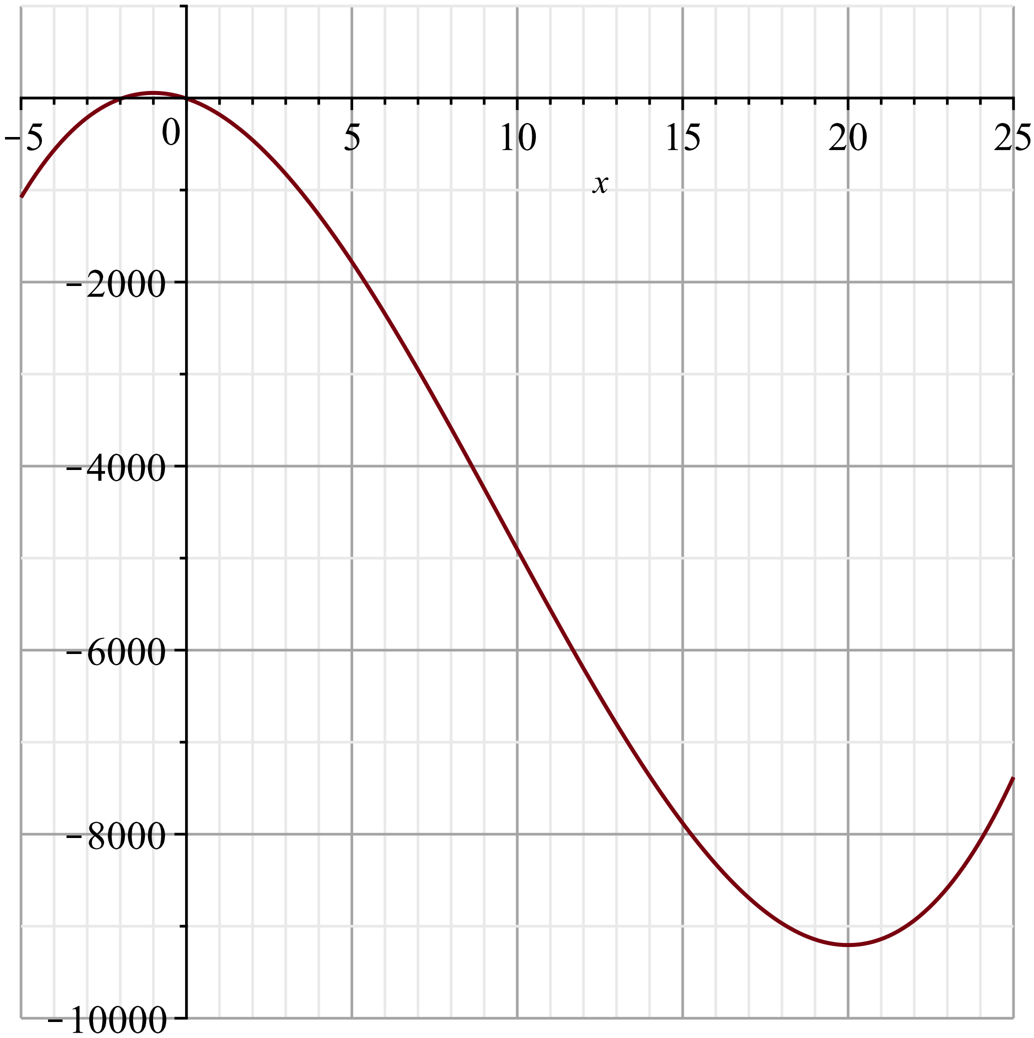
Først findes ekstremumssteder ved at løse ligningen f'(x)=0

$solve(f'(x) = 0, x) = 20, -1$

Dvs. i x = -1 og x = 20 er der maximum, minimum eller vendetangent

Så plottes funktionen:

$plot(f(x), x = -5 ..25, gridlines, view = [-5 ..25, -10000 ..1000])$



Det kan nu konstateres udfra grafen og nulpunkterne for f', at monotoniforholdene for f (x) er som følger:
f(x) er voksende i]-∞;-1]
f(x) er aftagende i [-1;20]
f(x) er voksende i [20;∞[

Opgave 11 - med hjælpemidler

Opgaven

En funktion f er givet ved

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{x}} + 2x, \quad x > 0.$$

a) Bestem en forskrift for den stamfunktion til f, hvis graf går gennem punktet $P(4,10)$.

restart

a - Bestem en forskrift for stamfunktion gennem punkt

Funktionen defineres:

$$f := x \to \frac{1}{\sqrt{x}} + 2 \cdot x = x \to \frac{1}{\sqrt{x}} + 2\,x$$

Stamfunktion findes:

$\int f(x)\,dx + k = 2\sqrt{x} + x^2 + k \xrightarrow{\text{assign to a name}} F(x)$

Da F(4) = 10, findes k ved løsning af ligningen $F(4) = 10$:
$unassign('k');\ k := simplify(solve(F(4) = 10, k)) = -10$

Den søgte stamfunktion er derfor $F(x) = 2\sqrt{x} + x^2 - 10$

Opgave 12 - med hjælpemidler

Opgaven

Et telesupportcenter har over en årrække opgjort ventetid for betjening af kunder, der ringer til telesupportcenteret. De fandt følgende fordeling af ventetid:

Ventetid (minutter)	0-5	5-10	10-15	15-20	20-25	25-30	>30
Fordeling	22,1%	17,2%	13,4%	10,4%	8,1%	6,3%	22,5%

For at undersøge om fordelingen af ventetid har ændret sig, udtager telesupportcenteret på tilfældig måde en stikprøve på 500 opkald fra kunder. Stikprøven indeholdt følgende fordeling af ventetid:

Ventetid (minutter)	0-5	5-10	10-15	15-20	20-25	25-30	>30
Antal	90	70	75	50	45	45	125

Man ønsker at undersøge nulhypotesen:

Fordelingen af ventetid for betjening af telesupportcenterets kunder, der ringer til telesupportcenteret, har ikke ændret sig.

a) Beregn med udgangspunkt i nulhypotesen den forventede fordeling af ventetid i stikprøven.

b) Undersøg på et 5% signifikansniveau, om nulhypotesen kan forkastes.

$restart;\ with(Gym):$

a - Beregn den forventede fordeling

Forventede fordelingsandele indtastes i Maple:
$f := [0.221, 0.172, 0.134, 0.104, 0.081, 0.063, 0.225]:$

Observationerne indtastes ligeledes:
$obs := [90, 70, 75, 50, 45, 45, 125]:$

Antal observationer er så:
$n := add(obs) = 500$

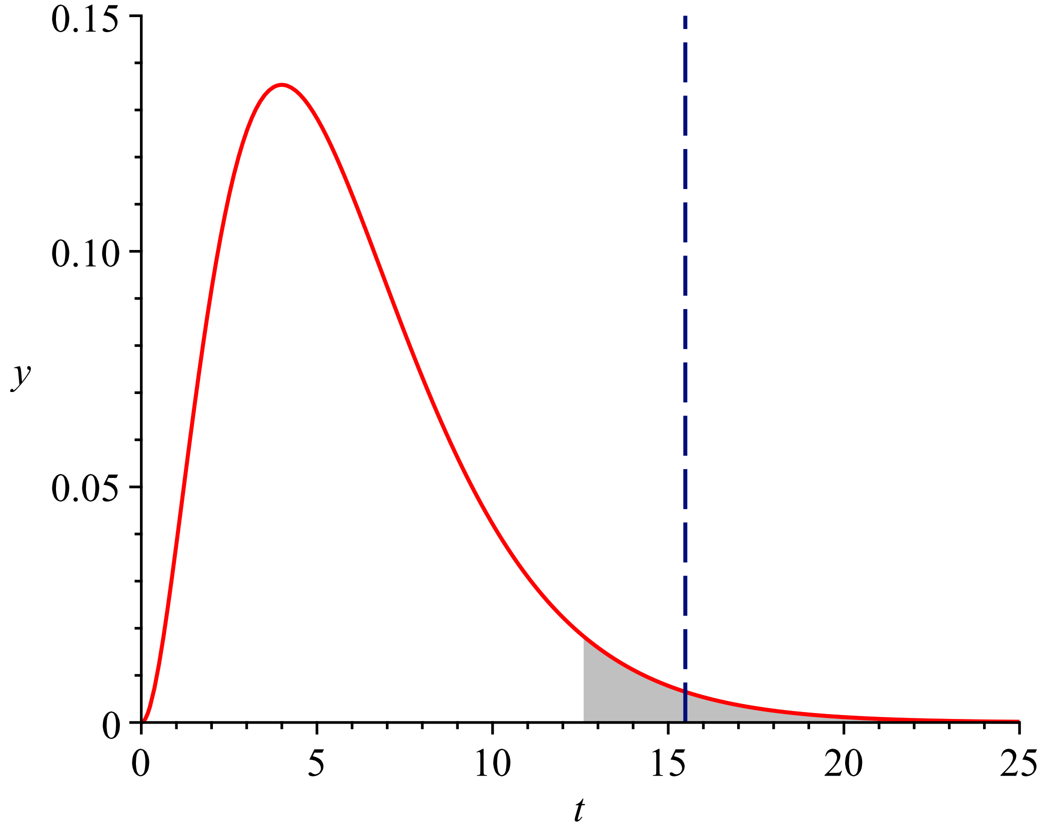
Den forventede ventetidsfordeling er:
$forv := n \cdot f = [110.500, 86.000, 67.000, 52.000, 40.500, 31.500, 112.500]$

Dvs. den forventede fordeling opgjort på ventetid er:
0-5 minutter: 110,5
5-10 minutter: 86
10-15 minutter: 67
15-20 minutter: 52
20-25 minutter: 40,5
25-30 minutter: 31,5
>30 minutter: 112,5

b - Undersøg nulhypotesen på et 5% signifikansniveau

Vi bruger funktionen ChiKvadratGOFtest til at udregne p-værdien (level er signifikansniveauet)
:
ChiKvadratGOFtest(*obs*, *forv*, *level* = 0.05)

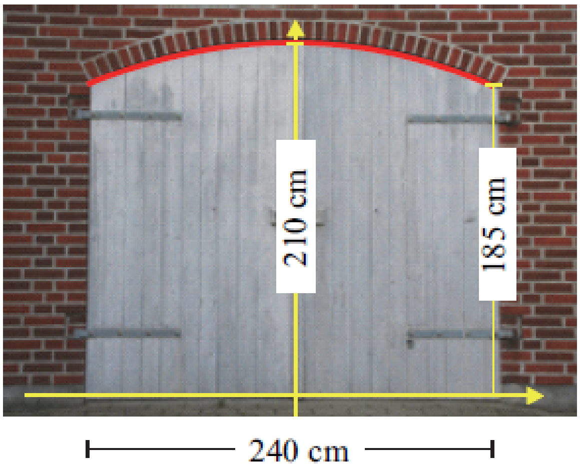
χ^2-teststørrelse = 15.487
Frihedsgrader = 6
Kritisk værdi = 12.592
p-værdi = 0.016791

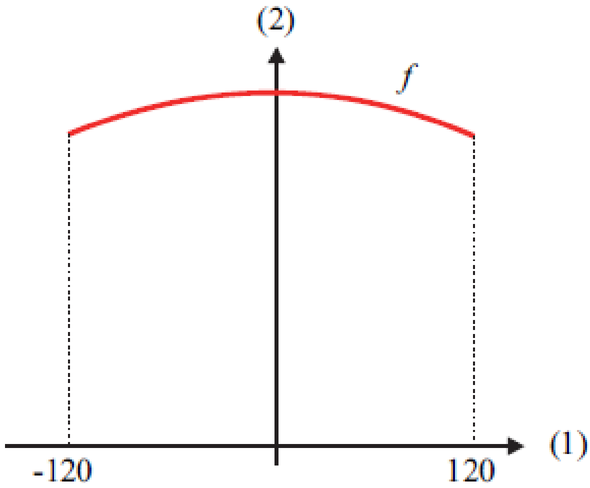


Det ses at p-værdien er 1,6%
Dvs. at med et signifikansniveau på 5%, må vi forkaste vores nulhypotese, der siger at fordelingen
af ventetid ikke har ændret sig.

Opgave 13 - med hjælpemidler

Opgaven





Figuren viser en garageport, som har bredden 240 cm, højden 185 cm ved hængslerne og højden 210 cm midt på porten.
I en model kan den øverste bue af garageporten beskrives ved en del af grafen for et andengradspolynomium f. Modellen er indtegnet i et koordinatsystem, hvor førsteaksen følger portens nederste kant, og andenaksen følger midten af porten.

a) Gør rede for, at en forskrift for f kan skrives som

$$f(x) = -0,001736 \cdot x^2 + 210.$$

b) Benyt modellen til at bestemme arealet af garageporten.

restart

a - Gør rede for en forskrift

Funktionen defineres:
$f := x \rightarrow -0.001736 \cdot x^2 + 210 = x \rightarrow (-1) \cdot 0.001736\, x^2 + 210$

Nu kontrolleres det, om forskriften passer til punkterne ved at sætte førstekoordinaten ind i funktionen og
udregne funktionsværdien
$f(-120) = 185.001600$
$f(0) = 210.$
$f(120) = 185.001600$
Det ses at funktionsværdierne stemmer med punkterne med største afvigelse på 16 μm, og derfor må forskriften være korrekt

b - Bestem garageportens areal

Arealet er arealet mellem funktionen graf og x-aksen i intervallet $[-120, 120]$ og det kan bestemmes som integralet:

$$A := \int_{-120}^{120} f(x)\, \mathrm{d}x = 48400.12800$$

Med enheder: $A\,\mathrm{cm}^2 = 48400,\ \mathrm{cm}^2 \xrightarrow{\text{replace units}} 4{,}84\ \mathrm{m}^2$

Dvs. garageportens areal er 48400 cm^2 eller 4,84 m^2