Eksemplarisk løsning af eksamensopgave

Nedenstående opgaver er delprøven med hjælpemidler fra Matematik B eksamen d. 22 maj 2014

restart

with(*Gym*) :

Opgave 7

Foto: www.dreamstime.com

Tabellen viser udviklingen i den gennemsnitlige tilbagetrækningsalder fra arbejdsmarkedet for danske lønmodtagere i perioden 2006-2012.

Årstal	2006	2007	2008	2009	2010	2011	2012
Tilbagetræknings-alder (år)	62,01	62,25	62,47	62,75	62,77	63,00	63,08

I en model kan udviklingen beskrives ved

$$y = a \cdot x + b,$$

hvor y er den gennemsnitlige tilbagetrækningsalder for danske lønmodtagere til tidspunktet x (målt i år efter 2006).

a) Benyt tabellens data til at bestemme konstanterne a og b.

b) Benyt modellen til at bestemme den gennemsnitlige tilbagetrækningsalder for danske lønmodtagere i 2014, og giv en fortolkning af konstanten a.

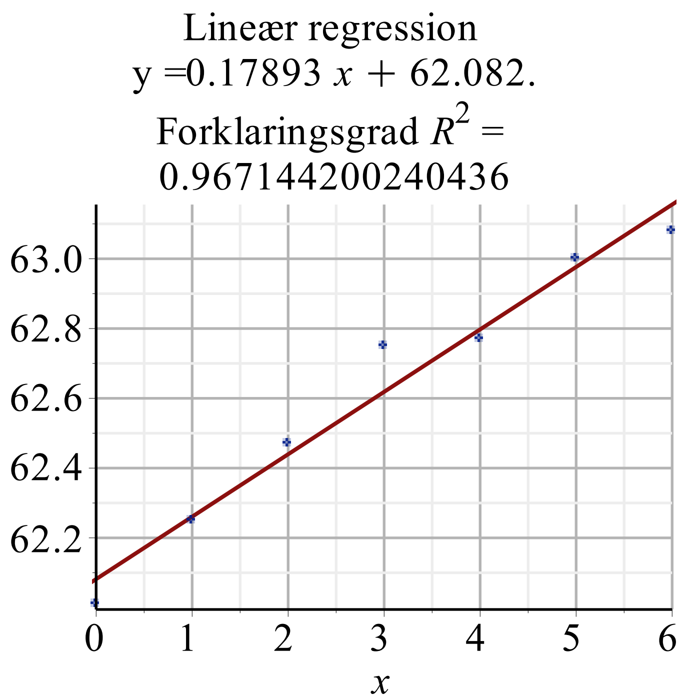
c) I hvilket år vil den gennemsnitlige tilbagetrækningsalder for danske lønmodtagere ifølge modellen overstige 65 år?

Kilde: Politiken 2.9.13

a) For at bestemme a og b i y=ax+b defineres to lister med data fra opgaven

$År := [0, 1, 2, 3, 4, 5, 6]$:

$Alder := [62.01, 62.25, 62.47, 62.75, 62.77, 63.00, 63.08]:$
Herefter bruges Maple-kommandoen $LinReg(x, y)$ for at lave en lineær regression

$LinReg(År, Alder) =$ 

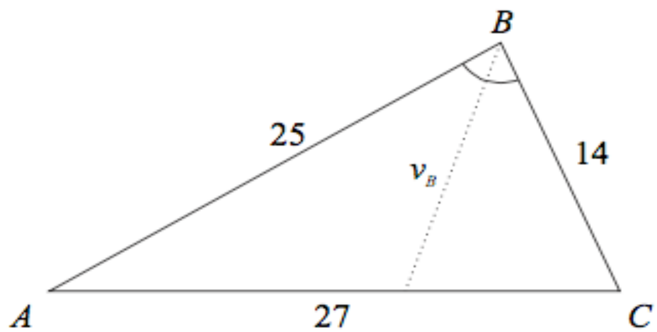
Dvs. a=0,179 og b=62,1

b) Bestem den gennemsnitlige tilbagetrækningsalder i 2014, og fortolk a
$f(x) := 0.17893\,x + 62.082:$
Da 2014 er 8 år efter 2006 udregnes f(8)
$f(8) = 63.51344$
Dvs. den gennemsnitlige tilbagetrækningsalder for danske lønmodtagere i 2014 er 63,5 år
Da a=0,17893 stiger den gennemsnitlige tilbagetrækningsalder med 0,18 år hvert år.

c) Hvornår vil den gennemsnitlige tilbagetrækningsalder være 65 år?
Der opstilles ligningen f(x)=65 og den løses
$solve(f(x) = 65) = 16.30938124$
Dvs. den gennemsnitlige tilbagetrækningsalder vil overstige 65 efter 17 år, dvs. i år 2023

restart
with(*Gym*) :
Opgave 8

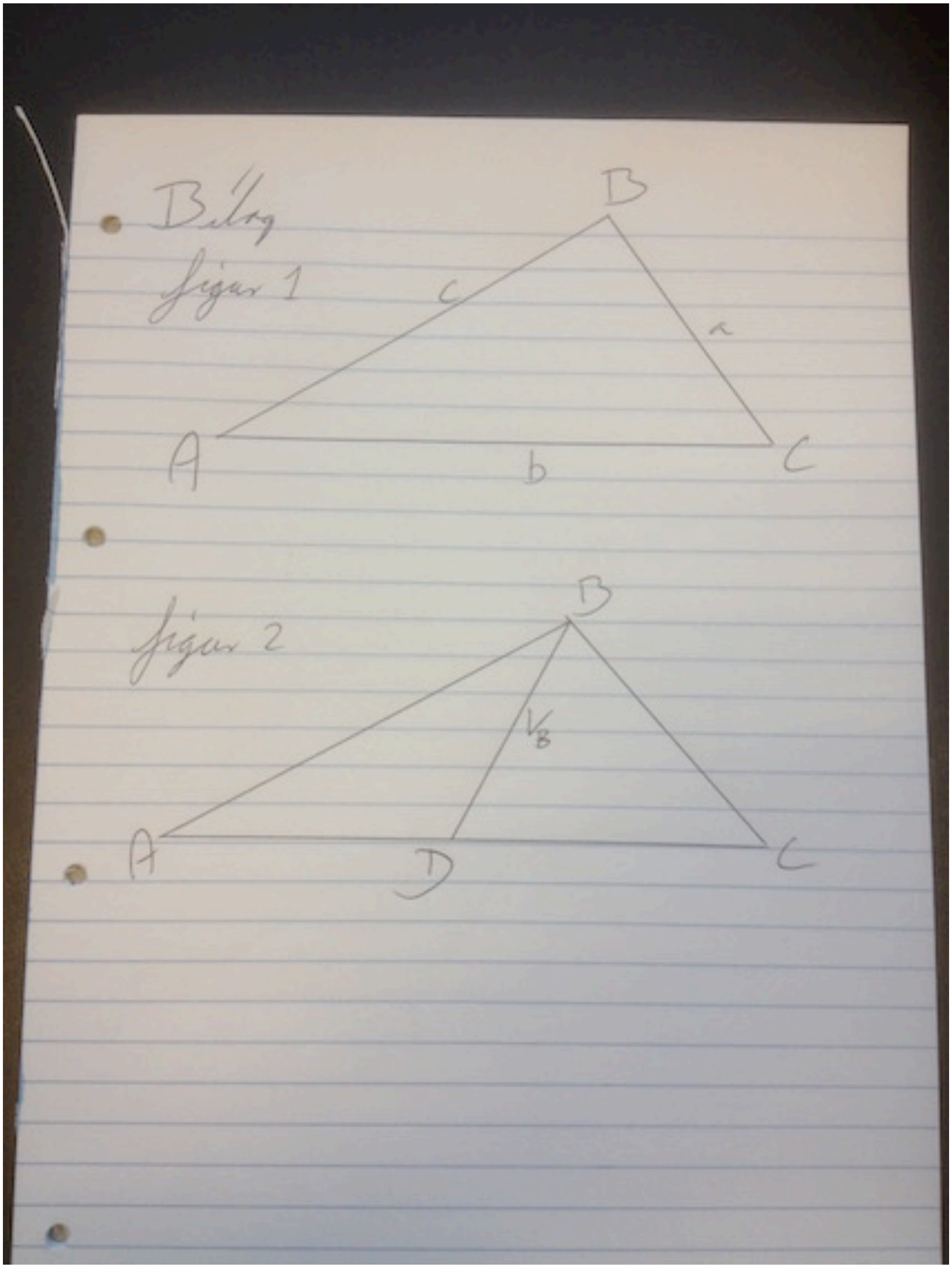
I trekant ABC er $|AB| = 25$, $|BC| = 14$ og $|AC| = 27$.



a) Bestem $\angle A$ og $\angle B$ i trekant ABC.

b) Bestem arealet af trekant ABC, og bestem længden af vinkelhalveringslinjen v_B fra B.

Nedenstående er et billede af et bilag der vedlægges besvarelsen



a) Bestem vinkel A og B i trekant ABC, se figur 1 i bilaget

a=14, b=27 og c=25

For at bestemme vinkel A bruges cosinusrelationen

$a^2 = b^2 + c^2 - 2 \cdot b \cdot c \cdot Cos(A)$

Med oplysningerne fra opgaven

$solve\left(14^2 = 27^2 + 25^2 - 2 \cdot 27 \cdot 25 \cdot Cos(A)\right) = 30.93201991$

Dvs. A=30,93°
Tilsvarende for at bestemme vinkel B
$solve\left(27^2 = 14^2 + 25^2 - 2 \cdot 14 \cdot 25 \cdot Cos(B)\right) = 82.44784821$
Dvs. B=82,45°

b) Arealet af trekant ABC og vinkelhalveringslinjen fra B
Her bruges først formlen: $T = \frac{1}{2} b \cdot c \cdot Sin(A)$ i trekant ABC

$T = \frac{1}{2} \cdot 25 \cdot 27 \cdot Sin(30.9320) = T = 173.4818870$
Dvs. Arealet af trekant ABC er 173,5

Nu skal vinkelhalveringslinjen fra B beregnes. Punktet D fastlægges så siden $|BD| = v_B$ er vinkelhalveringslinje fra vinkel B, se figur 2 i bilaget
Det ses at vinkel ABD er $\frac{1}{2} ABC = \frac{1}{2} \cdot 82.4478 = 41.22390000$ og $|AB| = 25$. Derudover fik vi ovenfor at vinkel A=30,9320°
Da vinkelsummen i en trekant er 180° gælder
$\angle$ADB er $180 - 30.9320 - 41.2239 = 107.8441$
Nu kan længden af vinkelhalveringslinjen bestemmes vha. sinusrelationen anvendt på trekant ABD

$$\frac{Sin(A)}{v_B} = \frac{Sin(\angle ADB)}{|AB|}$$

Tilsidst sættes talene ind og ligningen løses

$$solve\left(\frac{Sin(30.93201991)}{v_b} = \frac{Sin(107.8441)}{25}\right) = 13.49994855$$

Dvs. vinkelhalveringslinjen v_B er 13,50

Opgave 9

Massen af et bestemt radioaktivt stof aftager som funktion af tiden. Der er følgende sammenhæng mellem massen af det radioaktive stof og tiden t

$$f(t) = 12 \cdot 0{,}97^t ,$$

hvor $f(t)$ er massen af det radioaktive stof målt i gram, og t er antal år efter 2014.

a) Forklar, hvad tallene 12 og 0,97 fortæller om udviklingen i massen af det radioaktive stof.

b) Bestem halveringstiden for massen af det radioaktive stof.

a) Tallene 12 og 0,97 fortæller følgende om udviklingen i massen:
I år 2014 var der 12 gram af det radioaktive stof, og mængden er siden aftaget med 3% om året.

b) Halveringtiden
For at bestemme halveringstiden bruges formlen for halveringskonstant

$$T_{0.5} = \frac{\ln(0.5)}{\ln(a)}$$

Med tallene fra opgaven indsat: $T_{0.5} = \frac{\ln(0.5)}{\ln(0.97)} = 22.75657307$

Dvs. halveringstiden for massen af det radioaktive stof er ca. 22,8 år

Opgave 10

En funktion f er bestemt ved

$$f(x) = 2x^3 - 57x^2 - 120x - 5.$$

a) Opskriv en ligning for tangenten til grafen for f i punktet $P(1, f(1))$.

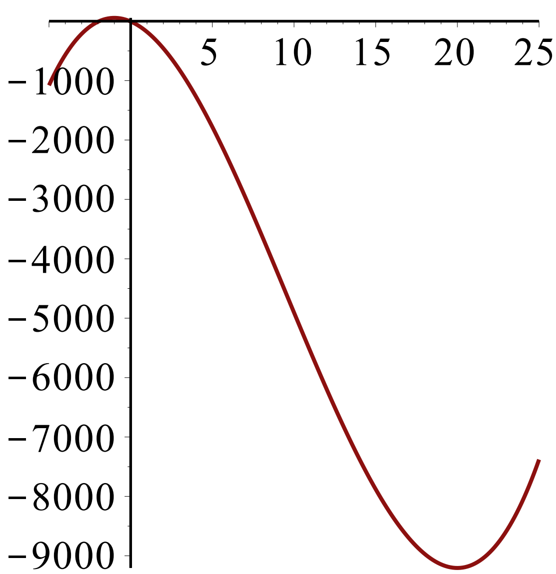
b) Bestem monotoniforholdene for f.

a) En ligning for tangenten til grafen for f i punktet P(1,f(1))
Først defineres funktionen
$f(x) := 2x^3 - 57x^2 - 120x - 5 :$
Dernæst defineres x_0
$x_0 := 1 :$
Så benyttes formlen for tangenten $y = f'(x_0) \cdot (x - x_0) + f(x_0) = y = -228x + 48$

Dvs. en ligning for tangenten er y=-228x+48

b) Bestem monotoniforholdene
Først findes ekstremumssteder ved at løse ligningen f'(x)=0
$solve(f'(x) = 0) = 20, -1$
Dvs. i x=-1 og x=20 er der maximum, minimum eller vendetangent
Så plottes funktionen

$plot(f, -5..25) =$



Det kan nu konstateres udfra grafen at monotoniforholdene for f(x) er som følger:
f(x) er voksende i]-∞;-1]

f(x) er aftagende i [-1;20]
f(x) er voksende i [20;∞[

Opgave 11

En funktion f er givet ved $$f(x)=\frac{1}{\sqrt{x}}+2x, \quad x>0.$$ a) Bestem en forskrift for den stamfunktion til f, hvis graf går gennem punktet $P(4,10)$.

a) Bestem en forskrift for stamfunktion gennem punkt
Først defineres funktionen

$$f(x) := \frac{1}{\sqrt{x}} + 2x :$$

Dernæst bestemmes stamfunktionen:

$$\int f(x)\, \mathrm{d}x = 2\sqrt{x} + x^2$$

Så defineres stamfunktionen

$$F(x) := 2\cdot\sqrt{x} + x^2 + k :$$

For at bestemme værdien af k løses ligningen F(4)=10

$$solve(F(4) = 10, k) = -10$$

Dermed er $k := -10$:

Dvs. $\boldsymbol{F(x) = 2\sqrt{x} + x^2 - 10}$

Opgave 12

Et telesupportcenter har over en årrække opgjort ventetid for betjening af kunder, der ringer til telesupportcenteret. De fandt følgende fordeling af ventetid:

Ventetid (minutter)	0-5	5-10	10-15	15-20	20-25	25-30	>30
Fordeling	22,1%	17,2%	13,4%	10,4%	8,1%	6,3%	22,5%

For at undersøge om fordelingen af ventetid har ændret sig, udtager telesupportcenteret på tilfældig måde en stikprøve på 500 opkald fra kunder. Stikprøven indeholdt følgende fordeling af ventetid:

Ventetid (minutter)	0-5	5-10	10-15	15-20	20-25	25-30	>30
Antal	90	70	75	50	45	45	125

Man ønsker at undersøge nulhypotesen:

Fordelingen af ventetid for betjening af telesupportcenterets kunder, der ringer til telesupportcenteret, har ikke ændret sig.

a) Beregn med udgangspunkt i nulhypotesen den forventede fordeling af ventetid i stikprøven.

b) Undersøg på et 5% signifikansniveau, om nulhypotesen kan forkastes.

a) Beregn den forventede fordeling

Den forventede fordeling beregnes udfra første fordeling:

$forv := 500 \cdot [0.221, 0.172, 0.134, 0.104, 0.081, 0.063, 0.225] =$
$[110.500, 86.000, 67.000, 52.000, 40.500, 31.500, 112.500]$

Dvs. den forventede fordeling opgjort på ventetid er:
0-5 minutter: 110,5
5-10 minutter: 86
10-15 minutter: 67
15-20 minutter: 52
20-25 minutter: 40,5
25-30 minutter: 31,5
>30 minutter: 112,5

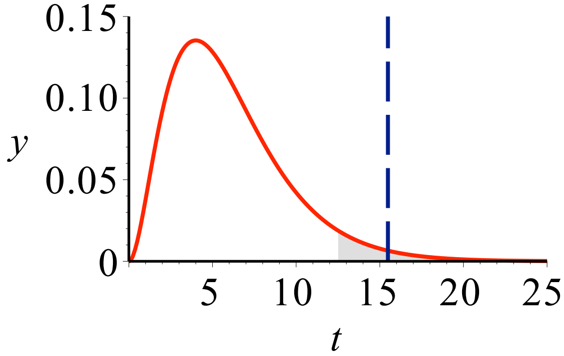
b) Undersøg nulhypotesen på et 5% signifikansniveau

Først defineres de observerede ventetider:

obs := [90, 70, 75, 50, 45, 45, 125] :
Derefter bruges funktionen ChiKvadratGOFtest til at udregne p-værdien

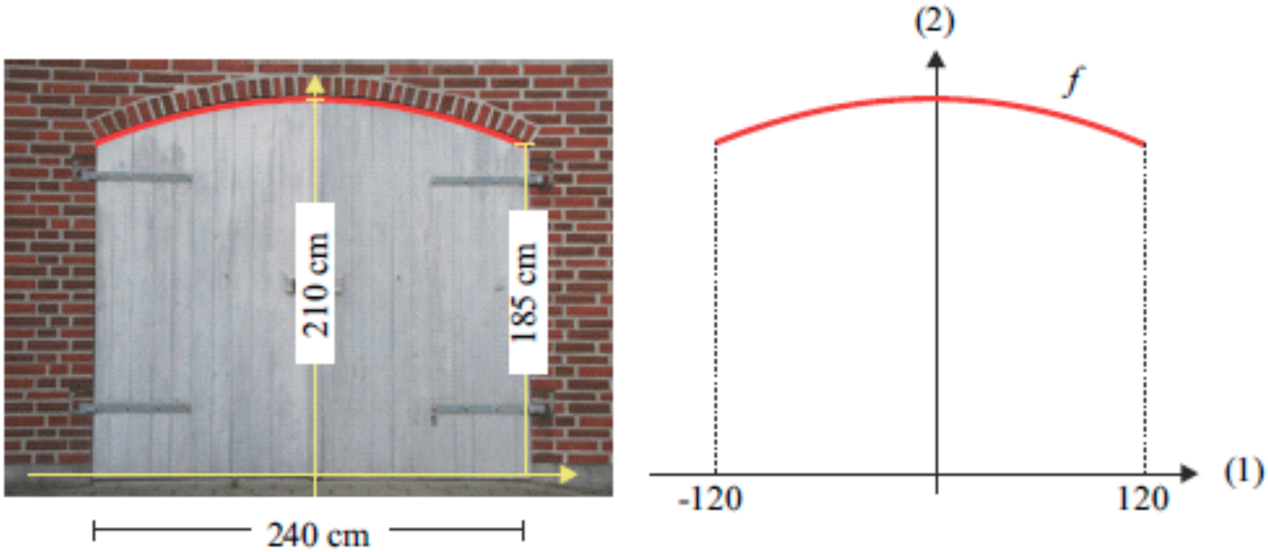
χ^2-teststørrelse = 15.487
Frihedsgrader = 6
Kritisk værdi = 12.592
p-værdi = 0.016791

ChiKvadratGOFtest(*obs*, *forv*) =



Det ses at P-værdien er 1,6%
Dvs. at med et signifikansniveau på 5%, må vi forkaste vores nulhypotese, der siger at fordelingen af ventetid ikke har ændret sig.

Opgave 13



Figuren viser en garageport, som har bredden 240 cm, højden 185 cm ved hængslerne og højden 210 cm midt på porten.
I en model kan den øverste bue af garageporten beskrives ved en del af grafen for et andengradspolynomium f. Modellen er indtegnet i et koordinatsystem, hvor førsteaksen følger portens nederste kant, og andenaksen følger midten af porten.

a) Gør rede for, at en forskrift for f kan skrives som

$$f(x) = -0{,}001736 \cdot x^2 + 210.$$

b) Benyt modellen til at bestemme arealet af garageporten.

a) Gør rede for en forskrift
Vi aflæser først følgende punkter A=(-120,185) B=(0,210) og C=(120,185)
Dernæst definrer vi funktionen
$f(x) := -0.001736 \cdot x^2 + 210 :$
Nu kontrolleres det, om forskriften passer til punkterne ved at sætte første koordinaten ind i funktionen og udregne funktionsværdien
$f(-120) = 185.001600$
$f(0) = 210.$
$f(120) = 185.001600$
Det ses at funktionsværdierne stemmer med punkterne og derfor må forskriften være korrekt

b) Bestem garageportens areal
Første defineres funktionen
$f(x) := -0.001736 \cdot x^2 + 210 :$
For at bestemme garageportens areal laves bestemt integration indenfor grænserne a=-120 og b=120
$int(f(x), x = -120 .. 120) = 48400.12800$

Dvs. garageportensareal er 48400 cm^2 eller 4,84m^2